

The certainty principle (review)

D. A. Arbatsky*

August, 2006

Abstract

The certainty principle (2005) allowed to conceptualize from the more fundamental grounds both the Heisenberg uncertainty principle (1927) and the Mandelshtam-Tamm relation (1945). In this review I give detailed explanation and discussion of the certainty principle, oriented to all physicists, both theorists and experimenters.

Historical comments

Uncertainty principle. A reader interested in the history of the *uncertainty* principle should read, for example, the review [1]. Here I give only some notes, that are important for the following recital.

The uncertainty principle was suggested by Heisenberg in 1927 [2]. Heisenberg formulated it as follows:

- The more precisely the position is determined, the less precisely the momentum is known in this instant, and vice versa.

For uncertainties of coordinate and momentum the following relation was suggested:

$$\Delta_\gamma X \Delta_\gamma P \sim \hbar . \quad (1)$$

Considering concrete examples, Heisenberg gave just qualitative formulation. But for the notion of “uncertainty” he did not give exact definition.

Soon Kennard [3] gave exact mathematical formulation for the case of coordinate and momentum. Assuming “commutation relation” $[X, P] = i\hbar$, he has shown that for an arbitrary quantum state \rangle the following relation takes place:

$$\Delta_\gamma X \Delta_\gamma P \geq \frac{\hbar}{2} . \quad (2)$$

And here

$$\Delta_\gamma X = \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle^{1/2} , \quad \Delta_\gamma P = \left\langle (P - \langle P \rangle)^2 \right\rangle^{1/2} .$$

It means that, in accordance with probabilistic interpretation of quantum mechanics, it was suggested to understand the uncertainties of coordinate and momentum as standard deviations of these observables.

Because of simplicity of the proof, the relation (2) became conventional mathematical expression of the uncertainty principle and appeared in all textbooks on quantum mechanics. All criticism (including that about correspondence to practical experiment) [1] was mainly ignored. But soon we will see that the certainty principle allows to get alternate inequalities, describing the uncertainty principle, which turn out to be more sapid from practical point of view.

Later the mathematical proof was generalized in many ways. And it was extended to other pairs of non-commuting observables. So, in order to avoid ambiguity in the term *uncertainty principle*, let us give here some other, more up-to-date and general, formulation of this principle¹:

*<http://daarb.narod.ru/> , <http://wave.front.ru/>

¹Such a formulation not only allows to better understand, what exactly is “uncertain”, but also allows to clearly see the contrast with the *certainty* principle.

- If one tries to describe the dynamical state of a *quantum* particle by methods of *classical* mechanics, then precision of such description is limited in principle. The *classical* state of the particle turns out to be *badly* defined. This uncertainty can be mathematically expressed by different inequalities, describing spreads of values of observables that have semiclassical limit.

Of course, Heisenberg could not formulate the uncertainty principle in this form. It would contradict the logic of historical moment. In 1927 physics came from classical mechanics to quantum, and the uncertainty principle was considered as a way from the old theory to new.

But today, when quantum mechanics is already well-established, the uncertainty principle is just a method of qualitative estimation of precision of semiclassical approximation. And there are no reasons to think that this principle is more fundamental than mathematical formalism of quantum mechanics.

Mandelshtam-Tamm relation. So far as for coordinate and momentum there is an uncertainty relation like (1), general arguments, connected with the theory of relativity,² point out that, seemingly, an uncertainty relation for time and energy like the following should exist:

$$\Delta_\gamma T \Delta_\gamma H \sim \hbar . \quad (3)$$

Heisenberg himself suggested such a relation. But even in that time it was clear [4] that explanation of such a relation must be more difficult, because there is no such a quantum-mechanical observable as “time”, and it is unclear what should be understood as “uncertainty” of time.

Nevertheless, physicists wanted to believe that the uncertainty principle was a *fundamental* physical principle, and attempts to ground relation (3) did not stop up to now. These attempts mainly tried to show that the notion “uncertainty of time” was meaningful. And it was usually made by analysis of measurement process, i. e. to analysis of interaction of quantum particle with apparatus like Heisenberg microscope. (a detailed review with critical analysis see in [5])

I cannot say that those attempts were unsuccessful. Nevertheless, I think that such an approach does not correspond to general methodology of quantum mechanics. The matter is that analytical formalism of quantum mechanics is oriented to studying quantum systems as independent physical objects. This analytical formalism does not study details of interaction of apparatuses with the quantum system.

In 1945 Mandelshtam and Tamm [6] gave rigorous mathematical formulation of relation³

$$|\delta t| \Delta_\gamma H \geq \hbar . \quad (4)$$

Mandelshtam and Tamm named this relation “the uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics”, because, obviously, they thought that they found mathematical expression of the uncertainty principle for energy and time. Correspondingly, further attempts to ground *uncertainty* relation for energy and time were generally attempts to show that the quantity δt in Mandelshtam-Tamm relation can be understood in some sense as “uncertainty” of time.

But, I believe that there are no reasons convincing enough to call Mandelshtam-Tamm relation as *uncertainty* relation. As it was explained above, the uncertainty principle is not more fundamental than mathematical formalism of quantum mechanics itself. And what is more, analysis of relativistic quantum systems shows that this principle is *less* fundamental. Therefore there are no reasons to think that fundamental uncertainty relation like (3) must exist.

Soon we will see that Mandelshtam-Tamm relation in the case of closed systems is a consequence of other physical principle, the *certainty* principle, which is more fundamental than the Heisenberg uncertainty principle. And the quantity δt in the inequality (4), if we make transformation from Schrödinger to Heisenberg representation (or to RCQ-representation), is a logarithmic coordinate on Poincare group. For some purposes this coordinate can be interpreted as “uncertainty of time”, but, generally speaking, there is no need in such interpretation.

As regards non-closed systems, with arbitrary dependence of Hamiltonian on time, Mandelshtam-Tamm relation should be considered as relation for the speed of quantum evolution. And it is quite independent relation, not mathematically equivalent to the certainty relation for time and energy.

²But soon we will see that these arguments are *incorrect*, because existence of the uncertainty principle is connected with specific peculiarities of *non-relativistic* approximation.

³Here it is written a little differently, so that connection with further discussion would be clearer.

Certainty principle. When we raise a question about application of ideas connected with the theory of relativity in quantum mechanics, it is worth to think about what we know about relativistic invariance of quantum theory at all.

The group of invariance of Minkowski space⁴ is Poincare group. With invariance with respect to this group of laws of nature, in general, and of quantum mechanics, in particular, is connected the notion of relativistic invariance.

All known physically important quantum systems, to which action of Poincare group can be applied, are quantum fields (or their subsystems). And before 2002 mathematical construction of quantum fields was made by such recipes⁵, which made action of Poincare group on space of states of quantum field hidden. In fact, physicists were satisfied by statement that Poincare group acts on space of states not-explicitly, by some quite complicated formulas.

When relativistic canonical quantization (RCQ) appeared [8] (for introduction review [9] is recommended) it became clear how action of Poincare group is transferred from Minkowski space to the space of states of quantum field.⁶ It became also obvious the following:

- The notion of coordinate as quantum-mechanical observable for relativistic systems is not natural at all, not even non-fundamental. (Attempts in the past to introduce coordinates for some systems, for example [10], seem to be quite artificial.)
- For this reason the uncertainty principle *can not* be fundamental, in the sense of its generalization for relativistic quantum theory.

Using methodology of RCQ, I have formulated [12] the *certainty* principle:

- If one describes the dynamical state of a quantum particle (system) by methods of *quantum* mechanics, then the *quantum* state of the particle (system) turns out to be *well* defined. This certainty of the quantum dynamical state means that “small” space-time transformations can not substantially change the quantum state. And for the case of Poincare group, for transformations, that can substantially change the quantum state, we have estimation⁷:

$$\Delta \rangle (-\delta x_\mu P_\mu + \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} J_{\mu\nu}) \geq \hbar , \quad (5)$$

Here P_μ is a vector operator of energy-momentum, $J_{\mu\nu}$ is a tensor operator of the four-dimensional angular momentum, δx_μ and $\delta \omega_{\mu\nu}$ are the standard logarithmic coordinates of the Poincare group.

So far as the certainty principle is universal, it works well also in usual quantum mechanics, including *non-relativistic*. So, it seems to be surprising that it was not formulated earlier. Nevertheless, there are two explanations for this.

First, this principle is formulated naturally with basic notions of RCQ. In particular, it is most natural in formulation of the certainty principle to understand the notion of *dynamical state* within RCQ interpretation. This difficulty, seemingly, was the main.

Second, in order to come to the certainty principle from the usual quantum mechanics, it is necessary to use the theory of quantum angle (Fubini-Study metric). But existence of this metric, though not difficult to prove, is not obvious. This metric was discovered only in 1905 by Fubini [13] and Study [14], and most physicists do not know about it.

Mathematical formalism

Quantum angle (Fubini-Study metric). Consider the unit sphere $\|x\| = 1$ in the usual three-dimensional Euclidean space \mathbb{R}^3 . The distance measured on the surface of the sphere between any two points is equal to the angle between rays starting from the center of coordinates and coming through these points.

⁴Of four-dimensional space-time of the special theory of relativity.

⁵Recipes, because formal mathematical process did not exist.

⁶Specific feature of RCQ method is construction of quantum fields in the frame of four-dimensional geometry of Minkowski space, without artificial separation of space and time.

⁷Here and later we imply relativistic summation by pairs of the same Greek indices:

$$a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 .$$

So, the connection of angles with rays on the sphere makes obvious the important property of angle: it satisfies the “triangle inequality”:

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b) + \angle(b, c) . \quad (6)$$

It is known, that angle in this example is expressed through the scalar product $\langle \cdot | \cdot \rangle$ in the space \mathbb{R}^3 by formula:

$$\angle(a, b) = \arccos \langle a | b \rangle .$$

Here in the right part of the formula vectors, whose ends are in the points of intersections of the rays a and b with the unit sphere, are denoted by the same letters as rays. Possible values of angle in this example are in the range from 0 to π .

Let us now consider angles not between rays, but between lines coming through the center of coordinates. In this case possible values of angle are in the more narrow range from 0 to $\pi/2$. The formula for the angle in this case is slightly changed:

$$\angle(a, b) = \arccos |\langle a | b \rangle| . \quad (7)$$

Will the angle satisfy the triangle inequality (6) in this case? The answer to this question does not seem to be immediately obvious, because for every line we have two points on the sphere. But elementary logical reasoning allows to reduce this example to the previous. The answer turns out to be positive.

Consider now the case of the three-dimensional complex Hilbert space \mathbb{C}^3 . Instead of real lines in this case we obviously have complex lines, i. e. one-dimensional complex subspaces. Every such a subspace intersects with the unit sphere even not in two, but in infinite number of points. These points are different from each other by complex factor, whose absolute value is equal to one.

The angle in this case is defined by the same formula (7), but the scalar product here corresponds to the space \mathbb{C}^3 . Possible values of angle, obviously, also are in the range from 0 to $\pi/2$.

Will angle in this case satisfy the triangle inequality (6)? The answer in this case turns out to be positive also. This fact was proved by Fubini [13] and Study [14] (quite simple proof is also given in [12]), so the angle between complex lines in Hilbert space is called *Fubini-Study metric*.

Of course, the fact that triangle inequality takes place cannot depend on the dimensionality of the Hilbert space, because when we check the triangle inequality we always can consider the corresponding three-dimensional subspace.

So far as in quantum mechanics the space of states of a quantum system \mathcal{H} is complex Hilbert space, Fubini-Study metric can be naturally considered as a measure of difference of quantum states. In this context we will call this metric *quantum angle*, because it allows to form natural collocations like “quantum angular speed”.

Quantum angular speed. Let now the vector r depend on the real parameter t : $t \in \mathbb{R}$, $r(t) \in \mathcal{H}$, $\|r(t)\| = 1$.

Let us define *the quantum velocity* $v(t)$ by the formula:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \delta t) - r(t)}{\delta t} .$$

Let us define also *the quantum angular speed* $\omega(t)$ by the formula:

$$\omega(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\angle(r(t + \delta t), r(t))}{|\delta t|} .$$

In order to express $\omega(t)$ through $v(t)$ let us decompose $v(t)$ into the two orthogonal components:

$$v_{\parallel}(t) = r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle , \quad v_{\perp}(t) = v(t) - v_{\parallel}(t) .$$

This decomposition formally looks the same as the corresponding decomposition in the real case, which is well known in kinematics of point. But we should not rely on this analogy too much. The matter is that in the real case existence of the parallel component of velocity is necessarily connected with growth of the norm of the vector. But in the complex case under consideration vector is supposed to have always unit norm. Existence of parallel component of velocity turns out connected with the possibility of multiplication of the vector by complex phase factor, that is equal to one. Nevertheless, the following theorem is true

Theorem. *The quantum angular speed is equal to the norm of the orthogonal component of the quantum velocity:*

$$\omega(t) = \|v_{\perp}(t)\| . \quad (8)$$

Before proving this theorem let us note that in the real case equality (8) is *definition* of angular speed ω . And angle in the real case is *defined* as integral of angular speed along extreme arc. After that trigonometrical function \arccos is *defined* for *finite* angles.

Straightforward transfer of such logic to the case of complex Hilbert space is problematic, because there are always many extreme arcs, and none of them is so simple that appearance of \arccos function would be geometrically obvious.

So, here we need to study directly infinitesimal angles, i. e. work around singular point of \arccos function. In order to escape from this, let us use Parseval equality to change \arccos to \arcsin :

$$\begin{aligned} \angle(r(t+\delta t), r(t)) &= \arccos |\langle r(t+\delta t) | r(t) \rangle| = \\ &= \arcsin \|r(t+\delta t) - r(t) \langle r(t) | r(t+\delta t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|r(t+\delta t) - r(t) - r(t) \langle r(t) | r(t+\delta t) - r(t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|v(t)\delta t + o(\delta t) - r(t) \langle r(t) | v(t)\delta t + o(\delta t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|(v(t) - r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle) \delta t + o(\delta t)\| = \\ &= \arcsin \|v_{\perp}(t) \delta t + o(\delta t)\| = \arcsin (\|v_{\perp}(t)\| |\delta t| + o(\delta t)) = \\ &= \|v_{\perp}(t)\| |\delta t| + o(\delta t) . \end{aligned}$$

Dividing by $|\delta t|$, we get (8). ■

Continuous unitary groups. Suppose now that we have in the space of states of quantum system a self-adjoint operator $A = A^*$. The set of unitary operators of type $U(\delta s) = e^{-i\delta s A/\hbar}$ (where δs runs the set of all real numbers, and \hbar is fixed positive real number (in quantum mechanics this is Planck's constant)) forms strongly continuous one-parameter unitary group: $U(\delta s_1)U(\delta s_2) = U(\delta s_1 + \delta s_2)$. The operator A here is called *generator* of this group.

And suppose that the state vector is changed by the action of this group:

$$r(\delta s) = |\delta s\rangle = U(\delta s)|\rangle = e^{-i\delta s A/\hbar}|\rangle .$$

Here $|\delta s\rangle \in \mathcal{H}$ is another notation of the vector with parameter equal to δs ; $|\rangle \in \mathcal{H}$ is a fixed ket-vector.

Suppose now that the function $r(\delta s)$ is differentiable. Then the quantum velocity is expressed by the formula:

$$v(\delta s) = \frac{1}{i\hbar} A e^{-i\delta s A/\hbar}|\rangle = \frac{1}{i\hbar} A |\delta s\rangle .$$

The mean of the operator A does not depend on time:

$$\overline{A} = \langle \delta s | A | \delta s \rangle = \langle e^{+i\delta s A/\hbar} A e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A \rangle .$$

Therefore the components of the quantum velocity can be written just as:

$$\begin{aligned} v_{\parallel}(\delta s) &= |\delta s\rangle \langle \delta s | \frac{1}{i\hbar} A | \delta s \rangle = \frac{1}{i\hbar} \overline{A} |\delta s\rangle \\ v_{\perp}(\delta s) &= \frac{1}{i\hbar} (A - \overline{A}) |\delta s\rangle . \end{aligned}$$

The quantum angular speed turns out to be independent of the parameter also:

$$\begin{aligned} \omega(\delta s) &= \|v_{\perp}(\delta s)\| = \frac{1}{\hbar} \langle \delta s | (A - \overline{A})^2 | \delta s \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle e^{+i\delta s A/\hbar} (A - \overline{A})^2 e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \Delta_A . \end{aligned}$$

Here Δ_A is a short notation for the standard deviation of A in the state $|\rangle$.

So, we have proved the important

Theorem. *Standard deviation of the generator of one-parameter unitary group is equal to the quantum angular speed, multiplied by Planck's constant \hbar . And both quantities remain conserved under the action of the group.*

Determine now, how different can become the initial $|\rangle$ and final $|\delta s\rangle$ vectors. The triangle inequality, in usual way, is generalized to arbitrary curves [12]. Therefore, the angle between initial and final vectors cannot be greater than increment of parameter, multiplied by quantum angular speed:

$$\angle(|\delta s\rangle, |\rangle) \leq |\delta s| \frac{1}{\hbar} \Delta_\gamma A. \quad (9)$$

For physical applications it is convenient to introduce some qualitative border, when two state vectors can be considered different *substantially*. So, we will say that two vectors are different *substantially*, if the angle between them is greater or equal to 1.

Let us reformulate inequality (9) as the following theorem.

Theorem. (certainty principle) *So that under the action of strongly continuous one-parameter unitary group $U(\delta s) = e^{-i\delta s A/\hbar}$ the initial state vector $|\rangle$ changes substantially, it is necessary to satisfy the inequality:*

$$|\delta s| \Delta_\gamma A \geq \hbar. \quad (10)$$

This theorem is easily generalized to the case when the group is many-parameter. Namely, if δs and A have matrix indices, implying summation, then the inequality (10) can be re-written for this case a little differently:

$$\Delta_\gamma(\delta s_j A_j) \geq \hbar.$$

And here δs_j are the so called logarithmic coordinates of the group.

It is worth also to mention the following. When proving the theorem we supposed that quantum velocity is well-defined, i. e. the corresponding derivative of the vector with respect to the parameter exists and belongs to the Hilbert space. But, if the generator is an unbounded operator, for some state vectors it can be not so. Nevertheless, the statement of the theorem turns out to be true even in this case, because in this case the value $\Delta_\gamma A$ turns out to be infinite. Therefore, when parameter is not equal to zero, in the left part of the inequality we have infinity (which is, of course, greater than Planck's constant).

So, the statement of the theorem turns out to be true for *any* state vector $|\rangle$ and *any* (self-adjoint) generator A .

Subgroups of the Poincare group

The theorem presented at the end of the previous section is the most general formulation of the certainty principle. But in different situations the unitary group under consideration can be representation of some concrete physical symmetry group. The most important example is Poincare group, for which the general certainty relation (5) was already presented above. This group has some physically important subgroups, which are so practically important, that we will discuss them here in more detail.

Space translations. It is known that generators of three parameter group of space translations are components of the vector operator of momentum P_1 , P_2 and P_3 . Consequently, the certainty relation is written as

$$\Delta_\gamma(\delta x_1 P_1 + \delta x_2 P_2 + \delta x_3 P_3) \geq \hbar. \quad (11)$$

Here numbers δx_1 , δx_2 and δx_3 form components of the vector that defines the translation.

If we suppose now that $\delta x_2 = \delta x_3 = 0$, and also omit the index, then the inequality (11) can be written as:

$$|\delta x| \Delta_\gamma P \geq \hbar.$$

Suppose now, that for the system under consideration we were able to find some observable X , that can be considered in some sense a “coordinate operator”. This supposition is accepted as undoubted in non-relativistic quantum mechanics. In contrast, in relativistic quantum mechanics there is no natural notion of coordinate.⁸ It

⁸This is true even for Dirac's electron. Superposition of positive- and negative-frequency solutions of Dirac's equation does not have any physical meaning, and therefore there is no observable described by “operator of multiplication by variable x ”.

is possible, for example, to form from generators of the Poincare group some vector operator, to which in classical mechanics coordinates of the center of mass correspond. But it should be understood that it will have some unusual properties. For example, its coordinates will not commute with each other.

Suppose that X is a self-adjoint operator with continuous spectrum, $X = X^*$. Let us denote $\Omega_{(a,b)}$ its spectral projector⁹ for an arbitrary real interval (a, b) .

Suppose also that X , being a coordinate, behaves in usual way under action of translations, namely, for any a , b and δx we have equality:

$$e^{+i\delta x P/\hbar} \Omega_{(a+\delta x, b+\delta x)} e^{-i\delta x P/\hbar} = \Omega_{(a,b)},$$

i. e. P is a “generator of spectral shifts” for X .

Suppose now that the system is in state \rangle , $\langle | \rangle = 1$.

The quantity $\langle \Omega_{(a,b)} \rangle$, obviously, defines the probability to find the system inside the interval (a, b) . Let us define such l and r , that

$$\langle \Omega_{(-\infty, l)} \rangle = \langle \Omega_{(r, +\infty)} \rangle = \frac{1 - \sin 1}{2} \approx 0,07926 \dots$$

It is easy to see, that l and r exist¹⁰. So, the quantity $\delta_\gamma X = r - l$ can be naturally called “uncertainty” of the coordinate X .

T h e o r e m. (uncertainty principle) *The following inequality takes place:*

$$\delta_\gamma X \Delta_\gamma P \geq \hbar. \quad (12)$$

In order to prove this theorem let us use (two times) the triangle inequality for the quantum angle:

$$\begin{aligned} \angle(\rangle, e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} \rangle) &\geq \angle(\Omega_{(-\infty, r)} \rangle, \Omega_{(r, +\infty)} e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} \rangle) - \\ &\quad - \angle(\rangle, \Omega_{(-\infty, r)} \rangle) - \angle(e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} \rangle, \Omega_{(r, +\infty)} e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} \rangle) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1 - \sin 1}{2}} - \arcsin \sqrt{\frac{1 - \sin 1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

But this means that under action of $e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar}$ the vector \rangle changes substantially.

Applying the *certainty* principle, we directly get (12). ■

So, the certainty principle allows to get the alternate inequality (12) describing the uncertainty principle. This inequality is not equivalent to the Kennard inequality (2).

From formal mathematical point of view, none of the inequalities (2) and (12) is stronger than the other.

But it is not difficult to see that the fraction of the quantities $\Delta_\gamma X$ and $\delta_\gamma X$ always satisfies the inequality:

$$\frac{2\Delta_\gamma X}{\delta_\gamma X} \geq \sqrt{1 - \sin 1} \approx 0,398 \dots$$

Therefore, if we weaken the Kennard inequality (2) by the additional factor 0,398 (which is usually not very important for qualitative estimations), then it becomes weaker than (12).

On the other hand, the fraction $\Delta_\gamma X / \delta_\gamma X$ can be arbitrarily great, or even infinitely great, if the wave packet is badly localized. In such a situation the Kennard inequality (2), in contrast to the inequality (12), does not give any estimation for the uncertainty of momentum at all.

So, the inequality (12) is more informative than (2) for qualitative estimations.

Space rotations. The generators of the three-parameter group of space rotations are components of the vector operator of angular momentum J_1 , J_2 and J_3 . Consequently, the certainty relation is written as

$$\Delta_\gamma(\delta\varphi_1 J_1 + \delta\varphi_2 J_2 + \delta\varphi_3 J_3) \geq \hbar.$$

⁹Roughly speaking, spectral projector is an operator nullifying wave function in X -representation outside of the given interval.

¹⁰But, generally speaking, they are not unique. In order to eliminate this non-uniqueness, it is convenient to choose l — maximum of the possible, and r — minimum. Then the distance $r - l$ will be minimum.

Logarithmic coordinates have here simple geometric interpretation: rotation, described by coordinates $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ and $\delta\varphi_3$, can be performed as rotation around the vector with these coordinates by angle equal to the length of this vector.

If we suppose now that $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = 0$ and omit the index, then we have:

$$|\delta\varphi| \Delta J \geq \hbar.$$

Let us try to get an uncertainty relation by the same scheme as in the case of the group of space translations.

First of all, it is necessary to note, that *uncertainty* relation in the form “product of uncertainty of angle and uncertainty of angular momentum is greater or equal to Planck’s constant” can not be suggested, because in a state, when uncertainty of angular momentum is equal to zero (an eigenstate), “uncertainty of angle” should not be greater than 2π .

Furthermore, here we meet the difficulty that it is impossible to introduce a “good” self-adjoint operator of angle. The number of operators turns out to be infinite (if at least one is defined), but as soon as we fix the choice of one of them by some condition (for example, that its spectrum is inside the interval from 0 to 2π), it turns out to have quite complicated behaviour under rotations, and analysis of formulas becomes difficult.

So, we will not choose here one from the infinite set of operators of angle, but will imply that we talk about the whole infinite set. For this infinite set we will use symbolic notation Φ .

Such an approach does not meet difficulties, because when deriving uncertainty relation we in fact operate with spectral measure (the set of spectral projectors). And this spectral measure for all operators of angle is the same in essence. Just argument of this measure is not an interval of the real line, as in the case of coordinate operator, but a segment of circle. And real coordinate on the circle should be understood up to addition of 2π . So, the spectral measure satisfies relation:

$$\Omega_{(a+2\pi, b+2\pi)} = \Omega_{(a, b)}.$$

Suppose also that the operator J of angular momentum is a “generator of spectral rotations” for Φ :

$$e^{+i\delta\varphi J/\hbar} \Omega_{(a+\delta\varphi, b+\delta\varphi)} e^{-i\delta\varphi J/\hbar} = \Omega_{(a, b)}.$$

The quantity $\langle \Omega_{(a, b)} \rangle$, obviously, defines the probability to find the system inside the angle segment (a, b) . Suppose now that there is such a small segment (l, r) , where mainly the probability to find the system is concentrated. Namely, suppose that the probability to find the system in the alternate segment is:

$$\langle \Omega_{(r, l+2\pi)} \rangle = \frac{1-\sin 1}{2} \approx 0,07926\dots$$

If r and l were chosen so that the quantity $\delta\Phi = r - l$ is minimum, then $\delta\Phi$ can be naturally called “uncertainty” of the angle Φ .

T h e o r e m. (uncertainty principle for angle and angular momentum) *The following inequality takes place:*

$$\delta\Phi \geq \min(\hbar / \Delta J; \pi). \quad (13)$$

Consider the case, when $\delta\Phi \leq \pi$. In this case the rotated angle segment (l, r) will not overlap with the non-rotated one, and we can apply the same estimation technique for quantum angle as in the case of translations.

So, let us use (two times) the triangle inequality for the quantum angle:

$$\begin{aligned} \angle(\rangle, e^{-i\delta\Phi J/\hbar} \rangle) &\geq \angle(\Omega_{(l, r)} \rangle, \Omega_{(r, r+\delta\Phi)} e^{-i\delta\Phi J/\hbar} \rangle) - \\ &\quad - \angle(\rangle, \Omega_{(l, r)} \rangle) - \angle(e^{-i\delta\Phi J/\hbar} \rangle, \Omega_{(r, r+\delta\Phi)} e^{-i\delta\Phi J/\hbar} \rangle) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1-\sin 1}{2}} - \arcsin \sqrt{\frac{1-\sin 1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

But this means that under action of $e^{-i\delta\Phi J/\hbar}$ the vector \rangle is changed substantially.

Applying the *certainty* principle, we directly get (13). ■

We see that the certainty principle allows to easily get also the simple *uncertainty* relation for angle and angular momentum.

It should be noted that attempt [16] to get an uncertainty relation for angle and angular momentum by analogy with the Kennard inequality (2) leads to quite complicated formulas. Namely, if we fix the self-adjoint operator of

angle Φ by the condition, that its spectrum is the interval $[-\pi, \pi]$, and define the “uncertainty” of angle by the formula:

$$\Delta'_\Phi = \min_{\delta\varphi} \sqrt{\langle e^{+i\delta\varphi J/\hbar} \Phi^2 e^{-i\delta\varphi J/\hbar} \rangle},$$

then we have the uncertainty relation:

$$\Delta'_\Phi \Delta_J \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 - \frac{3}{\pi^2} (\Delta'_\Phi)^2 \right]. \quad (14)$$

For investigation of semiclassical limit the inequality (13) turns out to be more convenient than (14), because allows to use weaker conditions for localization of wave packet.

Time shifts. Poincare group includes as a subgroup one-parameter group of shifts in time. It is natural to expect that the certainty principle has corresponding mathematical expression in this case. And this is really so.

But our discussion here is complicated by the circumstance that all educational literature on both classical and quantum mechanics is oriented to resolving of problems of dynamics only. And the notion of dynamical state is necessarily attributed to some moment of time. Such approach hides relativistic invariance. So, the notion of time shifts becomes senseless.

Completely self-consistent, from this point of view, are invariant Hamiltonian formalism (in the case of the classical mechanics) and relativistic canonical quantization (RCQ) (in the case of relativistic quantum field theory). In these approaches the theory includes not only time shifts, but also Lorentz boosts. But, so far as most physicists are not well-acquainted with such approaches now, here we will discuss some intermediate approach that is in essence based on Heisenberg representation. (Lorentz boosts we will not consider in this review at all.)

Usually, dynamical state S_t in some moment of time t is understood as some set of values, that can be measured in the moment t by some set of apparatuses, and that define the whole subsequent evolution of the system (i. e. analogous sets of values in subsequent moments of time). In classical mechanics dynamical state is usually described either by set of coordinates and velocities (Lagrangian formalism) or by set of coordinates and momenta (Hamiltonian formalism). In other words, dynamical state in a given moment of time is defined by a point on some manifold, which is called phase space. In quantum mechanics dynamical state is described by vector in Hilbert space.

When we have the question about description of the group of space motions on the space of dynamical states in some moment of time, we usually think in the following way. Suppose a set of physical apparatuses K , which measures the full set of dynamical variables of the system under consideration, under action of some motion G transferred to K' , $G : K \rightarrow K'$. And suppose for some dynamical state of the system S we have dynamical state S' , such that the set of apparatuses K' , which measures parameters of the state S' , gives the same results as K , which measures parameters of the state S . Then we say that under action of the transformation G state S transfers to S' . Symbolically we can write it as:

$$G : K \rightarrow K', K(S) = K'(S') \implies G : S \rightarrow S'.$$

Exactly in this way the action of space translations and rotations is introduced, described above.

It seems, it would be natural to apply this definition to the group of time shifts:

$$G : K_{t_1} \rightarrow K_{t_2}, K_{t_1}(S_{t_1}) = K_{t_2}(S_{t_2}) \implies G : S_{t_1} \rightarrow S_{t_2}.$$

But this definition turns out to be not very useful, because it turns out to be purely formal and with no connection with dynamics.

Let us improve a little the definition of dynamical state given above. Let us suppose that if some dynamical state S_{t_1} is transferred by evolution to S_{t_2} , then S_{t_1} and S_{t_2} describe the same dynamical state. In other words, dynamical state is just some abstract set of values (not necessarily connected with measurements in a concrete moment of time) defining evolution of the system. When we talk about quantum systems, we can think that dynamical state is just described by Heisenberg vector of state.

If the system is closed, its Hamiltonian does not depend on time, and it commutes with space motions. Therefore the theory of space motions, described in the previous sections, can be applied in this case. And what is more, the group of time shifts is joined here, which is described by the family of operators:

$$U(\delta t) = e^{-i\delta t(-H)/\hbar}.$$

It should be noticed that generator of this group is Hamiltonian with sign “minus”. An operator, describing action of the group under consideration, is reciprocal of the operator, describing evolution in Schrödinger equation. We can say that here the group acts actively, but in the Schrödinger representation it acts passively.

The certainty relation for the group of time shifts takes the form:

$$|\delta t| \Delta_\gamma H \geq \hbar . \quad (15)$$

If we look at this relation from the point of view of the Schrödinger representation (but doing so we lose connection with Poincare group), then this relation turns out to be exactly the Mandelshtam-Tamm relation [6] for the speed of quantum evolution.

So, the Mandelshtam-Tamm relation for the case of closed systems is a consequence of the certainty principle.

Let us consider now non-closed systems. The Mandelshtam-Tamm relation for the speed of quantum evolution (derived in the Schrödinger representation) is naturally generalized for this case. Let us denote Hamiltonian for this case as H^{full} . So far as the quantity $\Delta_{|t\rangle} H^{\text{full}}$, generally speaking, depends on time, it should be just averaged:

$$|\tau| \overline{\Delta_{|t\rangle} H^{\text{full}}} \geq \hbar . \quad (16)$$

Here τ is the time interval of evolution (it does not have meaning of logarithmic coordinate on any group).

The certainty principle in this situation, formally, turns out to be not applicable. But, in practical situations, when we consider non-closed quantum systems, their Hamiltonian can be usually represented as sum of two terms, the Hamiltonian of “free” system and Hamiltonian of interaction “with external classical field”:

$$H^{\text{full}} = H + H^{\text{int}} .$$

And usually the Hamiltonian of interaction H^{int} can be “turned off”.

In this case it is natural to connect the notion of dynamical state of the system with its evolution when Hamiltonian of interaction is turned off (though, the state can be considered in a concrete moment of time, without turning off the Hamiltonian of interaction). Correspondingly, the certainty relation (15) remains the same. Its meaning becomes somewhat more abstract, with no direct connection with the Mandelshtam-Tamm relation (16).

In the end, let us note that Mandelshtam and Tamm derived their relation by direct estimation of the scalar product of the initial and final vectors of state. They did not use the theory of Fubini-Study metric. Such a derivation turns out to be substantially shorter. But geometrical nature of the result turns out to be quite hidden. This additionally complicates interpretation (in addition to the more serious disadvantage: interpretation based on the Schrödinger equation).

Derivation of the Mandelshtam-Tamm relation (in the frame of the Schrödinger equation), based on Fubini-Study metric, was given later by Anandan and Aharonov [18]. They did not give the reference to Mandelshtam and Tamm. So, in the western literature this relation is often erroneously called the Anandan-Aharonov relation.

Acknowledgements

In closing I want to thank A. Kleyn, S. Lorenz, T. A. Bolokhov, A. V. Ossipov, E. V. Aksyonova, A. Yu. Toschevikova, M. Gatti, and A. K. Pati for helpful discussions, references and help in procuring literature.

References

- [1] J. Hilgevoord, J. Uffink “The uncertainty principle”, in *The Stanford encyclopedia of philosophy*, ed. E. N. Zalta (2001), <http://plato.stanford.edu/archives/win2001/entries/qt-uncertainty/>.
- [2] W. Heisenberg “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172-198 (1927). (cited in [1])
- [3] E. H. Kennard “Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen”, *Zeitschrift für Physik* **44**, 326-352 (1927). (cited in [1])
- [4] W. Pauli “Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik”, in *Handbuch der Physik*, eds. K. Geiger and H. Scheel, 2nd edition, v. 245, Berlin: Springer (1933). (cited in [1])

- [5] Yu. I. Vorontsov „Sootnoshenie neopredelyonnosti energiya - vremya izmereniya“, UFN **133**(2), 351-365 (1981), <http://www.ufn.ru/archive/russian/abstracts/abst5151.html> .
- [6] L. I. Mandelshtam, I. E. Tamm, “The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics”, J. Phys. (USSR) **9**, 249-254 (1945).
[Rus.: L. I. Mandelshtam, I. E. Tamm „Sootnoshenie neopredelyonnosti energiya-vremya v nerelyativistskoy kvantovoy mekhanike“, Izv. Akad. Nauk SSSR (ser. fiz.) **9**, 122-128 (1945), in [7], p. 306-315.]
- [7] L. I. Mandelshtam, *Polnoe sobranie trudov*, v. 2, M.-L. (1947).
- [8] D. A. Arbatsky “On quantization of electromagnetic field”, Font. Phys. **42**, 3-45 (2002), <http://daarb.narod.ru/qed-eng.html> , <http://wave.front.ru/qed-eng.html> , arXiv:math-ph/0402003 .
[Rus.: D. A. Arbatsky „O kvantovanii elektromagnitnogo polya“ (2002), <http://daarb.narod.ru/qed-rus.html> , <http://wave.front.ru/qed-rus.html> , arXiv:math-ph/0402003 .]
- [9] D. A. Arbatsky “What is “relativistic canonical quantization”?” (2005), <http://daarb.narod.ru/wircq-eng.html> , <http://wave.front.ru/wircq-eng.html> , arXiv:math-ph/0503029 .
[Rus.: D. A. Arbatsky „Chto takoe „relyativistskoe kanonicheskoe kvantovanie“?“ (2005), <http://daarb.narod.ru/wircq-rus.html> , <http://wave.front.ru/wircq-rus.html> , arXiv:math-ph/0503029 .]
- [10] T. D. Newton, E. P. Wigner “Localized states for elementary systems”, Rev. Mod. Phys. **21**(3), 400-406 (1949).
[Rus.: „Lokalizovannyye sostoyaniya elementarnykh sistem“, in [11], p. 277.]
- [11] E. Wigner „*Etyudy o simmetrii*“, M.: Mir (1971). [Eng.: E. P. Wigner “*Symmetries and reflections*”, Bloomington-London: Indiana univ. press (1970).]
- [12] D. A. Arbatsky “The certainty principle” (2005), Font. Phys. **81**, 27-32 (2005), <http://daarb.narod.ru/tcp-eng.html> , <http://wave.front.ru/tcp-eng.html> , arXiv:quant-ph/0506165 .
[Rus.: D. A. Arbatsky „Printsip opredelyonnosti“ (2005), <http://daarb.narod.ru/tcp-rus.html> , <http://wave.front.ru/tcp-rus.html> , arXiv:quant-ph/0506165 .]
- [13] G. Fubini, Atti Istit. Veneto, **63**, 502-513 (1904). (cited in [15])
- [14] E. Study, Math. Ann., **60**, 321-378 (1905). (cited in [15])
- [15] A. L. Onischik „Fubini-Study metrika“, *Matematicheskaya entsyklopediya*, v. 5, ed. I. M. Vinogradov, M.: Sov. ents. (1985).
- [16] D. Judge, Nuovo Cimento **31**, 332 (1964). (cited in [17])
- [17] A. S. Davydov „*Kvantovaya mekhanika*“, 2-nd ed., M.: Nauka (1973).
- [18] J. Anandan, Y. Aharonov “Geometry of quantum evolution”, Phys. Rev. Lett. **65**(14), 1697-1700 (1990).

	uncertainty principle (Heisenberg, 1927)	certainty principle (Arbatsky, 2005)
x, p	$\Delta_{\rangle} X \Delta_{\rangle} P \geq \frac{\hbar}{2}$ (Kennard, 1927) $\delta_{\rangle} X \Delta_{\rangle} P \geq \hbar$ (Arbatsky, 2006)	$ \delta x \Delta_{\rangle} P \geq \hbar$ (Arbatsky, 2005) $\Delta_{\rangle} (\delta x_1 P_1 + \delta x_2 P_2 + \delta x_3 P_3) \geq \hbar$ (Arbatsky, 2005)
φ, J	$\Delta'_{\rangle} \Phi \Delta_{\rangle} J \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 - \frac{3}{\pi^2} (\Delta'_{\rangle} \Phi)^2 \right]$ (Judge, 1964) $\delta_{\rangle} \Phi \geq \min (\hbar / \Delta_{\rangle} J ; \pi)$ (Arbatsky, 2006)	$ \delta \varphi \Delta_{\rangle} J \geq \hbar$ (Arbatsky, 2005) $\Delta_{\rangle} (\delta \varphi_1 J_1 + \delta \varphi_2 J_2 + \delta \varphi_3 J_3) \geq \hbar$ (Arbatsky, 2005)
t, E	—	$ \delta t \Delta_{\rangle} H \geq \hbar$ (Mandelstam, Tamm, 1945)
all	—	$\Delta_{\rangle} (- \delta x_{\mu} P_{\mu} + \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} J_{\mu\nu}) \geq \hbar$ (Arbatsky, 2005)

Принцип определённости (обзор)

Д. А. Арбатский*

Август 2006 г.

Аннотация

Принцип определённости (2005) позволил осмыслить с более фундаментальных позиций как принцип неопределённости Гейзенберга (1927), так и соотношение Мандельштама-Тамма (1945). В настоящем обзоре даётся подробное объяснение и обсуждение принципа определённости, ориентированное на всех физиков, как теоретиков, так и экспериментаторов.

Исторические комментарии

Принцип неопределённости. Читателю, интересующемуся историей принципа *неопределённости*, рекомендуется познакомиться, например, с обзором [1]. Здесь же будут даны только некоторые замечания, важные с точки зрения дальнейшего изложения.

Принцип неопределённости был предложен Гейзенбергом в 1927 г. [2]. Сам Гейзенберг его сформулировал так:

- Чем более точно определена координата, тем менее точно в то же время известен импульс, и наоборот.

При этом для неточностей координаты и импульса было указано качественное соотношение вида:

$$\Delta_X \Delta_P \sim \hbar. \quad (1)$$

Гейзенберг, рассматривая конкретные примеры, дал именно качественную формулировку. При этом самому понятию „неточности“ он не дал точного определения.

Вскоре Кеннард [3] дал точную математическую формулировку для случая координаты и импульса. Предполагая справедливость „коммутационного соотношения“ $[X, P] = i\hbar$, он показал, что для произвольного квантового состояния \rangle имеет место соотношение:

$$\Delta_X \Delta_P \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2)$$

При этом

$$\Delta_X = \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle^{1/2}, \quad \Delta_P = \left\langle (P - \langle P \rangle)^2 \right\rangle^{1/2}.$$

То есть, в соответствии с вероятностной интерпретацией квантовой механики, под неточностями координаты и импульса предлагалось понимать среднеквадратичные отклонения этих наблюдаемых.

Ввиду исключительной простоты доказательства, соотношение (2) стало общепризнанным математическим выражением принципа неопределённости и попало во все учебники квантовой механики. При этом всевозможная критика (в том числе в плане соответствия практическому эксперименту) [1] оказалась более или менее проигнорированной. Однако, скоро мы увидим, что принцип определённости позволяет получать альтернативные неравенства, описывающие принцип неопределённости, которые оказываются более содержательными с практической точки зрения.

Далее математическое доказательство различным образом обобщалось. При этом оно распространялось на другие пары некоммутирующих наблюдаемых. Поэтому, чтобы избежать неясности в самом термине

*<http://daarb.narod.ru/>, <http://wave.front.ru/>

принцип неопределённости, приведём здесь несколько иную, более современную и общую, формулировку этого принципа¹:

- Если попытаться описывать динамическое состояние *квантовой* частицы методами *классической* механики, то точность такого описания принципиально ограничена. *Классическое* состояние частицы оказывается *плохо* определённым. Эта неопределённость может быть математически выражена различными неравенствами, описывающими разброс значений наблюдаемых, имеющих квазиклассический предел.

Разумеется, Гейзенберг не мог сформулировать принцип неопределённости в такой форме. Это бы противоречило логике исторического момента. Ведь в 1927 году физика переходила от классической механики к квантовой, и принцип неопределённости воспринимался как путь из старой теории в новую.

Сегодня же, когда квантовая механика уже состоялась, принцип неопределённости является всего лишь методом качественной оценки точности квазиклассического приближения. И нет никаких оснований считать этот принцип более фундаментальным, чем сам математический аппарат квантовой механики.

Соотношение Мандельштама-Тамма. Поскольку для координаты и импульса существует соотношение неопределённостей вида (1), общие соображения, связанные с теорией относительности,² указывают, что, по-видимому, должно существовать и соотношение неопределённостей для времени и энергии вида:

$$\Delta_t \Delta_H \sim \hbar. \quad (3)$$

Сам Гейзенберг указал на такое соотношение. Однако, уже в то время было ясно [4], что с данным соотношением дело обстоит сложнее, так как не существует квантовомеханической наблюдаемой „время“, и не ясно, что же следует понимать под „неопределённостью“ времени.

Тем не менее, физикам всё же хотелось верить, что принцип неопределённости является *фундаментальным* физическим принципом, а потому попытки обосновать соотношение (3) не прекращались до самого последнего времени. При этом они в основном сводились к попыткам показать, что понятие „неопределённость времени“ является осмысленным. И это осмысление обычно проводилось путём анализа процесса измерения, то есть к анализу взаимодействия квантовой частицы с прибором типа микроскопа Гейзенберга. (подробный обзор с критическим анализом см. в [5])

Нельзя сказать, что эти попытки были безуспешными. Тем не менее, думается, такой подход не соответствует общей методологии квантовой механики. Дело в том, что аналитический аппарат квантовой механики ориентирован на изучение квантовых систем как самостоятельных физических сущностей. Этот аналитический аппарат дистанцируется от подробностей взаимодействия приборов с изучаемой системой.

В 1945 г. Мандельштам и Тамм [6] дали строгую математическую формулировку соотношения вида³

$$|\delta t| \Delta_H \geq \hbar. \quad (4)$$

Мандельштам и Тамм называли это соотношение „соотношением неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике“, поскольку, очевидно, полагали, что нашли математическое выражение принципа неопределённости для энергии и времени. Соответственно, дальнейшие попытки обосновать соотношение *неопределённости* энергия-время в основном являлись попытками показать, что величина δt в соотношении Мандельштама-Тамма может в том или ином смысле пониматься как „неопределённость“ времени.

Однако, я всё же полагаю, что называть соотношение Мандельштама-Тамма соотношением *неопределённостей* нет достаточно убедительных оснований. Как было сказано выше, принцип неопределённости не более фундаментален, чем сам математический аппарат квантовой механики. Более того, анализ релятивистских квантовых систем показывает, что он *менее* фундаментален. Поэтому нет оснований считать, что фундаментальное соотношение неопределённостей вида (3) должно существовать.

Скоро мы увидим, что соотношение Мандельштама-Тамма в случае замкнутых систем является проявлением иного физического принципа, принципа *определённости*, который более фундаментален, чем принцип неопределённости Гейзенберга. При этом величина δt , фигурирующая в неравенстве (4), при переходе от представления Шрёдингера к представлению Гейзенберга (или к РКК-представлению) оказывается логарифмической координатой

¹Такая формулировка не только позволяет яснее понять, что же именно является „неопределённым“, но и позволяет увидеть ясно контраст с принципом *определённости*.

²Скоро мы, однако, увидим, что эти соображения *неверны*, ибо само существование принципа неопределённости связано со специфическими особенностями *нерелятивистского* приближения.

³Здесь оно записано несколько иначе, чтобы яснее была видна связь с дальнейшим.

на группе Пуанкаре. Для некоторых целей её можно интерпретировать как „неопределённость времени“, но в этом, вообще говоря, нет нужды.

Что касается незамкнутых систем, у которых гамильтониан произвольно зависит от времени, соотношение Мандельштама-Тамма следует считать соотношением для скорости квантовой эволюции. При этом оно является вполне самостоятельным соотношением, математически *не*-эквивалентным соотношению определённости для времени и энергии.

Принцип определённости. Когда встаёт вопрос о применении соображений, связанных с теорией относительности, в квантовой механике, стоит задуматься о том, что нам вообще известно про релятивистскую инвариантность в квантовой теории.

Группой инвариантности пространства Минковского⁴ является группа Пуанкаре. Именно с инвариантностью по отношению к этой группе законов природы вообще, и квантовой механики в частности, связывается понятие релятивистской инвариантности.

Все физически содержательные квантовые системы, на которые распространяется действие группы Пуанкаре, известные до сих пор, являются квантовыми полями (либо их подсистемами). При этом до 2002 года математическое конструирование квантовых полей производилось по таким рецептам⁵, которые делали действие группы Пуанкаре на пространстве состояний квантованного поля скрытым. Фактически, физики довольствовались утверждением, что группа Пуанкаре действует на пространстве состояний *неявно*, по некоторым довольно сложным формулам.

С появлением релятивистского канонического квантования (РКК) [8] (для начального ознакомления рекомендуется обзор [9]) стало, однако, понятно, каким образом действие группы Пуанкаре переносится с пространства Минковского на пространство состояний квантованного поля.⁶ Стало также очевидным следующее:

- Понятие координаты, как квантовомеханической наблюдаемой, для релятивистских квантовых систем вообще не является естественным, не говоря уже о фундаментальности. (Предпринимавшиеся в прошлом попытки введения координат для некоторых систем, например [10], представляются довольно искусственными.)
- По этой причине принцип неопределённости вообще *не может* быть фундаментальным, в плане распространения его на релятивистскую квантовую теорию.

Опираясь на методологию РКК, я сформулировал [12] принцип *определённости*:

- Если описывать динамическое состояние квантовой частицы (системы) методами *квантовой* механики, то *квантовое* состояние частицы (системы) оказывается *хорошо* определённым. Эта определённость квантового динамического состояния означает, что „малые“ пространственно-временные преобразования не могут существенно менять квантовое состояние. При этом в случае группы Пуанкаре, для преобразований, способных существенно менять квантовое состояние, справедлива оценка⁷:

$$\Delta \rangle (- \delta x_\mu P_\mu + \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} J_{\mu\nu}) \geq \hbar , \quad (5)$$

где P_μ — векторный оператор энергии-импульса, $J_{\mu\nu}$ — тензорный оператор четырёхмерного момента импульса, δx_μ и $\delta \omega_{\mu\nu}$ — стандартные логарифмические координаты группы Пуанкаре.

При этом, поскольку принцип определённости является универсальным, он прекрасно работает и в обычной квантовой механике, в том числе в *нерелятивистской*. Поэтому кажется удивительным, что этот принцип не был сформулирован раньше. Этому, однако, есть два объяснения.

Во-первых, этот принцип формулируется естественно с использованием базовых понятий РКК. В частности, при формулировке принципа определённости понятие *динамического состояния* наиболее естественно понимать в интерпретации РКК. Эта трудность, по-видимому, являлась главной.

⁴Четырёхмерного пространства-времени специальной теории относительности.

⁵Именно „рецептам“, поскольку формальный математический процесс вообще отсутствовал.

⁶Отличительной особенностью метода РКК является именно построение квантованных полей в рамках четырёхмерной геометрии пространства Минковского, без искусственного разделения пространства и времени.

⁷Здесь и далее по повторяющимся греческим тензорным индексам предполагается релятивистское суммирование:

$$a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 .$$

Во-вторых, для того, чтобы прийти к принципу определённости из обычной квантовой механики, требуется опираться на теорию квантового угла (метрики Фубини-Штуди). А существование этой метрики, хотя и несложно доказывается, отнюдь не является очевидным. Эта метрика была открыта только в 1905 году Фубини [13] и Штуди [14], и большинство физиков о ней не знают.

Математический формализм

Квантовый угол (метрика Фубини-Штуди). Рассмотрим единичную сферу $\|x\| = 1$ в обычном трёхмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 . Расстояние, измеренное по поверхности сферы, между любыми двумя точками равно углу между лучами, исходящими из начала координат и проходящими через данные точки.

Таким образом, связь углов между лучами с расстояниями на сфере делает очевидным важное свойство угла: он удовлетворяет „неравенству треугольника“:

$$\angle(a, c) \leq \angle(a, b) + \angle(b, c) . \quad (6)$$

Угол в этом примере, как известно, выражается через скалярное произведение $\langle \cdot | \cdot \rangle$ в пространстве \mathbb{R}^3 по формуле:

$$\angle(a, b) = \arccos \langle a | b \rangle .$$

Здесь в правой части формулы векторы, концы которых лежат в точках пересечения лучей a и b с единичной сферой, обозначены теми же буквами, что и сами лучи. Возможные значения угла в этом примере лежат в диапазоне от 0 до π .

Попробуем теперь рассмотреть углы не между лучами, а между прямыми, проходящими через начало координат. При этом возможные значения угла, очевидно, будут лежать в более узком диапазоне от 0 до $\pi/2$. Формула для угла в этом случае немного видоизменяется:

$$\angle(a, b) = \arccos |\langle a | b \rangle| . \quad (7)$$

Будет ли угол в этом случае удовлетворять неравенству треугольника (6)? Ответ на этот вопрос не кажется непосредственно очевидным, поскольку каждой прямой отвечает уже пара точек на единичной сфере. Однако, элементарное логическое рассуждение позволяет свести этот пример к предыдущему. Ответ оказывается положительным.

Попробуем теперь посмотреть, каким образом обстоят дела в трёхмерном комплексном гильбертовом пространстве \mathbb{C}^3 . Вместо вещественных прямых в этом случае мы, очевидно, имеем комплексные прямые, то есть одномерные комплексные подпространства. Каждое такое подпространство пересекается с единичной сферой $\|x\| = 1$ уже даже не по двум, а по бесконечному числу точек. Эти точки отличаются друг от друга комплексным множителем, равным по модулю единице.

Угол при этом определяется той же самой формулой (7), но скалярное произведение здесь уже соответствует пространству \mathbb{C}^3 . Возможные значения угла, очевидно, также будут лежать в диапазоне от 0 до $\pi/2$.

Будет ли угол и в этом случае удовлетворять неравенству треугольника (6)? Ответ и на этот раз оказывается положительным. Этот факт был установлен Фубини [13] и Штуди [14] (несложное доказательство также имеется в [12]), поэтому угол между комплексными прямыми в гильбертовом пространстве называется *метрикой Фубини-Штуди*.

Выполнение неравенства треугольника, конечно, не зависит от размерности гильбертова пространства, поскольку при проверке неравенства треугольника всегда можно перейти к соответствующему трёхмерному подпространству.

Далее, поскольку в квантовой механике пространство состояний квантовой системы \mathcal{H} является комплексным гильбертовым пространством, метрика Фубини-Штуди может естественным образом рассматриваться как мера различности квантовых состояний. В этом контексте мы будем называть данную метрику *квантовым углом*, поскольку это позволяет образовывать естественные словосочетания типа „квантовая угловая скорость“.

Квантовая угловая скорость. Пусть теперь нормированный вектор r зависит от вещественного параметра t : $t \in \mathbb{R}$, $r(t) \in \mathcal{H}$, $\|r(t)\| = 1$.

Определим *квантовую скорость* $v(t)$ равенством:

$$v(t) = \dot{r}(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \delta t) - r(t)}{\delta t} .$$

Определим также *квантовую угловую скорость* $\omega(t)$ равенством:

$$\omega(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\angle(r(t + \delta t), r(t))}{|\delta t|}.$$

Чтобы выразить $\omega(t)$ через $v(t)$, разложим $v(t)$ на две ортогональные составляющие:

$$v_{\parallel}(t) = r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle, \quad v_{\perp}(t) = v(t) - v_{\parallel}(t).$$

Данное разложение формально выглядит так же, как и соответствующее разложение в вещественном случае, хорошо известное в кинематике материальной точки. Однако, на эту аналогию нельзя полагаться слишком сильно. Дело в том, что в вещественном случае наличие параллельной компоненты скорости непременно связано с приращением нормы вектора. В рассматриваемом же нами комплексном случае вектор предполагается всегда сохраняющим единичную норму. Наличие же параллельной компоненты скорости оказывается связанным с возможностью домножения вектора на комплексный фазовый множитель, равный по модулю единице. Тем не менее, верна следующая

Т е о р е м а. *Квантовая угловая скорость равна норме ортогональной составляющей квантовой скорости:*

$$\omega(t) = \|v_{\perp}(t)\|. \quad (8)$$

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что в вещественном случае равенство (8) является *определением* угловой скорости ω . При этом угол в вещественном случае *определяется* как интеграл от угловой скорости вдоль экстремальной дуги. После чего уже *определяется* тригонометрическая функция \arccos для *конечных* углов.

Непосредственное перенесение такой логики на случай комплексного гильбертова пространства затруднительно, поскольку экстремальных дуг всегда много, и ни одна из них не является столь простой, чтобы появление вещественной функции \arccos было геометрически очевидно.

Поэтому здесь нам приходится исследовать непосредственно бесконечно малые углы, т. е. работать вблизи особой точки функции \arccos . Чтобы этого избежать, мы используем равенство Парсевалья для замены \arccos на \arcsin :

$$\begin{aligned} \angle(r(t + \delta t), r(t)) &= \arccos |\langle r(t + \delta t) | r(t) \rangle| = \\ &= \arcsin \|r(t + \delta t) - r(t) \langle r(t) | r(t + \delta t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|r(t + \delta t) - r(t) - r(t) \langle r(t) | r(t + \delta t) - r(t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|v(t) \delta t + o(\delta t) - r(t) \langle r(t) | v(t) \delta t + o(\delta t) \rangle\| = \\ &= \arcsin \|(v(t) - r(t) \langle r(t) | v(t) \rangle) \delta t + o(\delta t)\| = \\ &= \arcsin \|v_{\perp}(t) \delta t + o(\delta t)\| = \arcsin (\|v_{\perp}(t)\| |\delta t| + o(\delta t)) = \\ &= \|v_{\perp}(t)\| |\delta t| + o(\delta t). \end{aligned}$$

Деля на $|\delta t|$, получаем равенство (8). ■

Непрерывные унитарные группы. Допустим теперь, что в пространстве состояний квантовой системы имеется самосопряжённый оператор $A = A^*$. Множество унитарных операторов вида $U(\delta s) = e^{-i \delta s A / \hbar}$, где δs пробегает всё множество вещественных чисел, а \hbar является фиксированным положительным вещественным числом (в квантовой механике это число является постоянной Планка), образует сильно непрерывную однопараметрическую унитарную группу: $U(\delta s_1) U(\delta s_2) = U(\delta s_1 + \delta s_2)$. Оператор A при этом называется *генератором* данной группы.

И пусть теперь вектор состояния изменяется под действием рассматриваемой группы:

$$r(\delta s) = |\delta s\rangle = U(\delta s) \rangle = e^{-i \delta s A / \hbar} \rangle.$$

Здесь $|\delta s\rangle \in \mathcal{H}$ — другое обозначение вектора состояния при параметре, равном δs ; $\rangle \in \mathcal{H}$ — фиксированный кет-вектор состояния.

Будем полагать, что функция $r(\delta s)$ дифференцируема. Тогда квантовая скорость выражается формулой:

$$v(\delta s) = \frac{1}{i\hbar} A e^{-i \delta s A / \hbar} \rangle = \frac{1}{i\hbar} A |\delta s\rangle.$$

Среднее значение оператора A не зависит от параметра:

$$\overline{A} = \langle \delta s | A | \delta s \rangle = \langle e^{+i\delta s A/\hbar} A e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle = \langle A \rangle.$$

Поэтому составляющие квантовой скорости могут быть просто записаны как:

$$v_{\parallel}(\delta s) = |\delta s| \langle \delta s | \frac{1}{i\hbar} A | \delta s \rangle = \frac{1}{i\hbar} \overline{A} |\delta s|$$

$$v_{\perp}(\delta s) = \frac{1}{i\hbar} (A - \overline{A}) |\delta s|.$$

Квантовая угловая скорость оказывается также независимой от времени:

$$\omega(\delta s) = \|v_{\perp}(\delta s)\| = \frac{1}{\hbar} \langle \delta s | (A - \overline{A})^2 | \delta s \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle e^{+i\delta s A/\hbar} (A - \overline{A})^2 e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 e^{+i\delta s A/\hbar} e^{-i\delta s A/\hbar} \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \langle (A - \overline{A})^2 \rangle^{1/2} = \frac{1}{\hbar} \Delta_{\rangle} A.$$

Здесь $\Delta_{\rangle} A$ является сокращённым обозначением для среднеквадратичного отклонения A в состоянии \rangle .

Таким образом, доказана важная

Т е о р е м а. *Среднеквадратичное отклонение генератора однопараметрической унитарной группы равно квантовой угловой скорости, умноженной на постоянную Планка \hbar . При этом обе эти величины при действии группы остаются неизменными.*

Посмотрим теперь, насколько сильно могут разойтись начальный \rangle и конечный $|\delta s\rangle$ векторы. Неравенство треугольника обычным образом обобщается на произвольные криволинейные пути [12]. Поэтому угол между начальным и конечным векторами не может быть больше, чем приращение параметра, умноженное на квантовую угловую скорость:

$$\angle(|\delta s\rangle, \rangle) \leq |\delta s| \frac{1}{\hbar} \Delta_{\rangle} A. \quad (9)$$

Для физических приложений представляется удобным ввести некоторую качественную границу, при которой два вектора состояния могут считаться различающимися *существенно*. Поэтому мы будем говорить, что два вектора различаются *существенно*, если угол между ними больше либо равен 1.

Переформулируем теперь неравенство (9) в форме следующей теоремы.

Т е о р е м а. (принцип определённости) *Чтобы под действием сильно непрерывной однопараметрической унитарной группы $U(\delta s) = e^{-i\delta s A/\hbar}$ начальный вектор состояния \rangle изменился существенно, необходимо, чтобы выполнялось неравенство:*

$$|\delta s| \Delta_{\rangle} A \geq \hbar. \quad (10)$$

Эта теорема легко обобщается и на случай, когда группа является многопараметрической. Действительно, если δs и A имеют матричные индексы, по которым предполагается суммирование, то неравенство (10) для этого случая можно записать немного иначе:

$$\Delta_{\rangle}(\delta s_j A_j) \geq \hbar.$$

При этом величины δs_j являются так называемыми логарифмическими координатами данной группы.

Полезно отметить также следующее. При доказательстве теоремы мы предполагали, что квантовая скорость хорошо определена, то есть что производная вектора по параметру существует и принадлежит гильбертову пространству. Однако, если генератор является неограниченным оператором, для некоторых векторов состояния это может оказаться и не так. Тем не менее, утверждение теоремы оказывается верным и в этом случае, поскольку в этом случае величина $\Delta_{\rangle} A$ оказывается бесконечной. Поэтому при ненулевом значении параметра в левой части неравенства оказывается бесконечность (которая, конечно, больше постоянной Планка).

Таким образом, содержание теоремы оказывается верным для *любого* вектора состояния \rangle и *любого* (самосопряжённого) генератора A .

Подгруппы группы Пуанкаре

Приведённая в конце предыдущего раздела теорема и является самым общим математическим выражением принципа определённости. При этом, в зависимости от конкретной задачи, рассматриваемая унитарная группа может являться представлением той или иной физической группы симметрии. Наиболее важный пример при этом представляет собой группа Пуанкаре, общее соотношение определённости для которой (5) уже приводилось выше. Эта группа имеет некоторые физически важные подгруппы, которые настолько практически важны, что мы обсудим их здесь более подробно.

Пространственные трансляции. Генераторами трёхпараметрической группы пространственных трансляций, как известно, являются компоненты векторного оператора импульса P_1 , P_2 и P_3 . Соотношение определённости, соответственно, записывается как

$$\Delta_\gamma(\delta x_1 P_1 + \delta x_2 P_2 + \delta x_3 P_3) \geq \hbar. \quad (11)$$

Здесь числа δx_1 , δx_2 и δx_3 составляют компоненты вектора, который задаёт пространственный сдвиг.

Если положить теперь $\delta x_2 = \delta x_3 = 0$, а также опустить для краткости индекс, то неравенство (11) можно записать в виде:

$$|\delta x| \Delta_\gamma P \geq \hbar.$$

Допустим теперь, что у рассматриваемой квантовой системы нам удалось найти некоторую наблюдаемую X , которую можно в том или ином смысле считать её „оператором координаты“. Это предположение принимается как само собой разумеющееся в нерелятивистской квантовой механике. В релятивистской же квантовой теории никакого естественного понятия координаты нет.⁸ Можно, например, формально составить из генераторов группы Пуанкаре векторный оператор, компонентам которого в классической механике соответствуют координаты центра масс. При этом следует иметь в виду, что он будет обладать довольно необычными свойствами. Например, его компоненты не будут коммутировать друг с другом.

Будем полагать, что X — самосопряжённый оператор с непрерывным спектром, $X = X^*$. Обозначим $\Omega_{(a,b)}$ его спектральный проектор⁹ для произвольного вещественного интервала (a, b) .

Предположим также, что X , будучи координатой, ведёт себя обычным образом под действием трансляций, а именно, что для любых a , b и δx имеет место равенство:

$$e^{+i\delta x P/\hbar} \Omega_{(a+\delta x, b+\delta x)} e^{-i\delta x P/\hbar} = \Omega_{(a,b)},$$

то есть P является „генератором спектральных сдвигов“ для X .

Пусть теперь система находится в состоянии $|\rangle$, $\langle |\rangle = 1$.

Величина $\langle \Omega_{(a,b)} \rangle$, очевидно, определяет вероятность найти систему внутри интервала (a, b) . Определим такие l и r , что

$$\langle \Omega_{(-\infty, l)} \rangle = \langle \Omega_{(r, +\infty)} \rangle = \frac{1 - \sin 1}{2} \approx 0,07926 \dots$$

Легко видеть, что l и r существуют¹⁰. При этом величину $\delta_\gamma X = r - l$ вполне естественно можно назвать „неопределённостью“ координаты X .

Т е о р е м а. (принцип неопределённости) *Имеет место неравенство:*

$$\delta_\gamma X \Delta_\gamma P \geq \hbar. \quad (12)$$

Для доказательства этой теоремы воспользуемся (двукратно) неравенством треугольника для квантового угла:

$$\begin{aligned} \angle(|\rangle, e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} |\rangle) &\geq \angle(\Omega_{(-\infty, r)} |\rangle, \Omega_{(r, +\infty)} e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} |\rangle) - \\ &\quad - \angle(|\rangle, \Omega_{(-\infty, r)} |\rangle) - \angle(e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} |\rangle, \Omega_{(r, +\infty)} e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar} |\rangle) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1 - \sin 1}{2}} - \arcsin \sqrt{\frac{1 - \sin 1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Но это означает, что под действием $e^{-i\delta_\gamma X P/\hbar}$ вектор $|\rangle$ меняется существенно.

Применяя принцип *определённости*, непосредственно получаем (12). ■

Таким образом, принцип определённости позволяет получить альтернативное неравенство (12), выражающее принцип неопределённости. Это неравенство не эквивалентно неравенству Кеннарда (2).

С формально-математической точки зрения, ни одно из неравенств (2) и (12) не является сильнее другого.

⁸Это касается в том числе и дираковского электрона. Суперпозиция положительно- и отрицательно-частотного решений уравнения Дирака не имеет никакого физического смысла, а потому наблюдаемой, описываемой „оператором умножения на переменную x “ не существует.

⁹Грубо говоря, спектральный проектор — это оператор, задуляющий волновую функцию в X -представлении вне данного интервала.

¹⁰Но, вообще говоря, не единственны. Чтобы устранить эту многозначность, удобно выбирать l максимальным из возможных, а r — минимальным. Тогда расстояние $r - l$ будет минимальным.

Однако, нетрудно видеть, что отношение величин $\Delta_J X$ и $\delta_J X$ всегда подчинено неравенству:

$$\frac{2\Delta_J X}{\delta_J X} \geq \sqrt{1 - \sin 1} \approx 0,398\dots$$

Следовательно, если ослабить неравенство Кеннарда (2) дополнительным множителем 0,398 (что обычно не принципиально для качественных оценок), то оно становится слабее (12).

С другой стороны, отношение $\Delta_J X / \delta_J X$ может быть сколь угодно большим, и даже бесконечно большим, если волновой пакет плохо локализован. В такой ситуации неравенство Кеннарда (2), в отличие от неравенства (12), вообще не даёт никакой оценки для неопределённости импульса.

Таким образом, неравенство (12) является более содержательным, чем (2), для качественных оценок.

Пространственные вращения. Генераторами трёхпараметрической группы пространственных вращений являются компоненты векторного оператора момента импульса J_1 , J_2 и J_3 . Соотношение определённости, соответственно, записывается как

$$\Delta_J (\delta\varphi_1 J_1 + \delta\varphi_2 J_2 + \delta\varphi_3 J_3) \geq \hbar.$$

Логарифмические координаты имеют здесь простую геометрическую интерпретацию: поворот, описываемый координатами $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$ и $\delta\varphi_3$ можно выполнить путём поворота вокруг вектора с этими координатами на угол, равный длине этого вектора.

Полагая $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = 0$ и опуская индекс, имеем:

$$|\delta\varphi| \Delta_J J \geq \hbar.$$

Попробуем теперь получить соотношение неопределённостей по той же схеме, что и в случае группы пространственных трансляций.

Прежде всего необходимо заметить, что соотношения *неопределённости* в форме „произведение неопределённости угла на неопределённость момента импульса больше либо равно постоянной Планка“ предложить заведомо невозможно, поскольку в состоянии, когда неопределённость момента импульса обращается в ноль (собственное состояние), „неопределённость угла“, как бы она ни определялась, не должна превосходить 2π .

Далее, здесь мы сталкиваемся с той трудностью, что „хороший“ самосопряжённый оператор угла ввести невозможно. Операторов угла оказывается бесконечно много (если определён хотя бы один), но как только мы фиксируем выбор одного из них каким-нибудь условием (например, чтобы его спектр лежал в интервале от 0 до 2π), он оказывается довольно сложно преобразующимся под действием вращений, и анализ формул сильно затрудняется.

Поэтому мы не будем здесь вообще уточнять выбор одного из бесконечного множества операторов угла, а будем подразумевать, что речь идёт сразу обо всём бесконечном классе. При этом для этого класса мы будем использовать символическое обозначение Φ .

Такой подход не порождает трудностей, поскольку при выводе соотношения неопределённости нам фактически приходится оперировать со спектральной мерой (множеством спектральных проекторов). А эта спектральная мера у всех операторов угла, в сущности, одна и та же. Просто аргументом этой меры фактически выступает не отрезок вещественной прямой, как в случае с оператором координаты, а сегмент окружности. Вещественная координата же на окружности должна пониматься с точностью до слагаемого 2π . Таким образом, спектральная мера удовлетворяет соотношению:

$$\Omega_{(a+2\pi, b+2\pi)} = \Omega_{(a, b)}.$$

Предположим также, что оператор J момента импульса является „генератором спектральных вращений“ для Φ :

$$e^{i\delta\varphi J/\hbar} \Omega_{(a+\delta\varphi, b+\delta\varphi)} e^{-i\delta\varphi J/\hbar} = \Omega_{(a, b)}.$$

Величина $\langle \Omega_{(a, b)} \rangle$, очевидно, определяет вероятность найти систему внутри углового сегмента (a, b) . Пусть теперь имеется такой небольшой угловой сегмент (l, r) , в котором в основном сосредоточена вероятность обнаружить систему. А именно, предположим, что вероятность обнаружить систему в дополнительном сегменте равна:

$$\langle \Omega_{(r, l+2\pi)} \rangle = \frac{1 - \sin 1}{2} \approx 0,07926\dots$$

Если r и l выбраны так, что величина $\delta_J \Phi = r - l$ минимальна, то $\delta_J \Phi$ можно при этом назвать „неопределённостью“ угла Φ .

Т е о р е м а. (принцип неопределённости для угла и момента импульса) *Имеет место неравенство:*

$$\delta_\gamma \Phi \geq \min(\hbar / \Delta_\gamma J; \pi). \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда $\delta_\gamma \Phi \leq \pi$. При этом повернутый угловой сегмент (l, r) не будет перекрываться с неповернутым, и можно применить тот же метод оценки квантового угла, что и в случае трансляций.

Итак, воспользуемся (двукратно) неравенством треугольника для квантового угла:

$$\begin{aligned} \angle(\rangle, e^{-i\delta_\gamma \Phi J/\hbar} \rangle) &\geq \angle(\Omega_{(l,r)} \rangle, \Omega_{(r,r+\delta_\gamma \Phi)} e^{-i\delta_\gamma \Phi J/\hbar} \rangle) - \\ &\quad - \angle(\rangle, \Omega_{(l,r)} \rangle) - \angle(e^{-i\delta_\gamma \Phi J/\hbar} \rangle, \Omega_{(r,r+\delta_\gamma \Phi)} e^{-i\delta_\gamma \Phi J/\hbar} \rangle) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{1-\sin 1}{2}} - \arcsin \sqrt{\frac{1-\sin 1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Но это означает, что под действием $e^{-i\delta_\gamma \Phi J/\hbar}$ вектор \rangle меняется существенно.

Применяя принцип *определённости*, непосредственно получаем (13). ■

Как видим, принцип определённости позволяет легко получить и простое соотношение *неопределённости* для угла и момента импульса.

Следует отметить, что попытка [16] получить соотношение неопределённости для угла и момента импульса по аналогии с неравенством Кеннарда (2) приводит к довольно сложным формулам. А именно, если зафиксировать самосопряжённый оператор угла Φ условием, что его спектр является интервалом $[-\pi, \pi]$, и определить „неопределённость угла“ по формуле:

$$\Delta'_\gamma \Phi = \min_{\delta\varphi} \sqrt{\langle e^{+i\delta\varphi J/\hbar} \Phi^2 e^{-i\delta\varphi J/\hbar} \rangle},$$

то имеет место соотношение неопределённости:

$$\Delta'_\gamma \Phi \Delta_\gamma J \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 - \frac{3}{\pi^2} (\Delta'_\gamma \Phi)^2 \right]. \quad (14)$$

Для исследования квазиклассического предела неравенство (13) оказывается более удобным, чем (14), т. к. позволяет накладывать более мягкие условия на локализацию волнового пакета.

Временные сдвиги. Группа Пуанкаре включает в качестве подгруппы однопараметрическую группу сдвигов во времени. Естественно ожидать, что принцип определённости имеет соответствующее математическое выражение и в этом случае. И это действительно так.

Но наше обсуждение здесь осложняется тем обстоятельством, что вся учебная литература и по классической и по квантовой механике ориентируется исключительно на решение задач динамики. При этом понятие динамического состояния обязательно относят к некоторому моменту времени. Такой подход полностью скрывает релятивистскую инвариантность. При этом понятие группы временных сдвигов становится фактически бессодержательным.

Полностью последовательными в этом плане являются инвариантный гамильтонов формализм (в случае классической механики) и релятивистское каноническое квантование (РКК) (в случае релятивистской квантовой теории поля). При этом в теорию естественным образом включаются не только временные сдвиги, но и лоренцевы бусты. Однако, поскольку с таким подходом в настоящее время большинство физиков знакомы плохо, мы здесь обсудим промежуточный подход, который, в сущности, основан на представлении Гейзенберга. (Лоренцевы бусты при этом мы в этом обзоре вообще рассматривать не будем.)

Обычно под динамическим состоянием S_t в некоторый момент времени t понимают набор величин, которые можно измерить в момент времени t некоторым набором приборов, и которые задают всю последующую эволюцию системы (то есть аналогичные наборы величин в последующие моменты времени). В классической механике динамическое состояние обычно описывается либо набором координат и скоростей (лагранжев формализм), либо набором координат и импульсов (гамильтонов формализм). То есть динамическое состояние в заданный момент времени определяется точкой на некотором многообразии, называемом фазовым пространством. В квантовой механике динамическое состояние описывается вектором в гильбертовом пространстве.

Когда встаёт вопрос об описании действия группы пространственных движений на пространстве динамических состояний в некоторый момент времени, обычно рассуждают так. Пусть набор физических приборов K ,

измеряющих полный набор динамических переменных рассматриваемой системы, под действием некоторого движения G перешёл в K' , $G : K \rightarrow K'$. И пусть для некоторого динамического состояния системы S имеется динамическое состояние S' , такое что набор приборов K' , измеряющий параметры состояния S' , выдаёт те же результаты, что и K , измеряющий параметры состояния S . Тогда говорят, что под действием преобразования G состояние S переходит в S' . Символически это можно записать так:

$$G : K \rightarrow K', K(S) = K'(S') \quad \Longrightarrow \quad G : S \rightarrow S'.$$

Именно таким путём вводится действие пространственных сдвигов и вращений, описанное выше.

Казалось бы, это же определение естественно можно распространить и на группу временных сдвигов:

$$G : K_{t_1} \rightarrow K_{t_2}, K_{t_1}(S_{t_1}) = K_{t_2}(S_{t_2}) \quad \Longrightarrow \quad G : S_{t_1} \rightarrow S_{t_2}.$$

Но от этого определения оказывается мало пользы, поскольку оно оказывается чисто формальным и никак не связанным с динамикой.

Приведённое выше определение динамического состояния мы немного усовершенствуем. Будем считать, что если некоторое динамическое состояние S_{t_1} в ходе эволюции переходит в S_{t_2} , то S_{t_1} и S_{t_2} описывают одно и то же динамическое состояние. То есть динамическое состояние — это просто некоторый абстрактный набор величин (не обязательно связанный с измерениями в конкретный момент времени), определяющий эволюцию системы. Когда речь идёт о квантовых системах, можно считать, что динамическое состояние просто описывается гейзенберговским вектором состояния.

При этом, если система замкнута, то её гамильтониан не зависит от времени, а также коммутирует с пространственными движениями. Поэтому описанная в предыдущих пунктах теория пространственных движений переносится и на этот случай. Кроме того, сюда присоединяется ещё и группа временных сдвигов, задаваемая семейством операторов:

$$U(\delta t) = e^{-i \delta t (-H)/\hbar}.$$

Следует обратить внимание, что генератором этой группы является гамильтониан со знаком „минус“. Оператор, описывающий действие рассматриваемой группы, является обратным к оператору, описывающему эволюцию в уравнении Шрёдингера. Можно сказать, что здесь группа действует активно, в то время как в представлении Шрёдингера она действует пассивно.

Соотношение определённости для группы временных сдвигов принимает вид:

$$|\delta t| \Delta_t H \geq \hbar. \quad (15)$$

Если посмотреть на это соотношение с точки зрения представления Шрёдингера (при этом естественная связь с группой Пуанкаре утрачивается), то это соотношение как раз оказывается соотношением Мандельштама-Тамма [6] для скорости квантовой эволюции.

Таким образом, соотношение Мандельштама-Тамма для случая замкнутых систем является следствием принципа определённости.

Обсудим теперь незамкнутые системы. Соотношение Мандельштама-Тамма для скорости квантовой эволюции (получаемое в представлении Шрёдингера) естественным образом обобщается на этот случай. Обозначим гамильтониан в этом случае как H^{full} . При этом, поскольку величина $\Delta_t H^{\text{full}}$, вообще говоря, зависит от времени, её нужно просто усреднить:

$$|\tau| \overline{\Delta_t H^{\text{full}}} \geq \hbar. \quad (16)$$

Здесь τ — промежуток времени, в течение которого происходит эволюция (он не имеет смысла логарифмической координаты на какой-либо группе).

Принцип определённости в этой ситуации оказывается формально неприменим. Однако, на практике, когда рассматриваются незамкнутые квантовые системы, их гамильтониан обычно представим в виде суммы двух слагаемых, собственного гамильтониана „свободной“ системы и гамильтониана взаимодействия „с внешним классическим полем“:

$$H^{\text{full}} = H + H^{\text{int}}.$$

При этом гамильтониан взаимодействия H^{int} обычно можно „выключать“.

В этом случае естественно связать понятие динамического состояния системы с её эволюцией при выключенном гамильтониане взаимодействия (хотя рассматриваться оно может в конкретный момент времени, без выключения гамильтониана взаимодействия). Соответственно, соотношение определённости (15) сохраняет свой прежний вид. Смысл его становится несколько более абстрактным, без какой-либо прямой связи с соотношением Мандельштама-Тамма (16).

В заключение отметим, что Мандельштам и Тамм вывели своё соотношение путём прямой оценки скалярного произведения для начального и конечного векторов состояния. Теорию метрики Фубини-Штуди они при этом не использовали. Такой вывод оказывается существенно короче. Но при этом геометрическая природа результата оказывается в значительной степени скрытой. Это дополнительно усложняет интерпретацию (помимо более серьёзного недостатка — интерпретации, основанной на уравнении Шрёдингера).

Вывод соотношения Мандельштама-Тамма (в рамках уравнения Шрёдингера), основанный на метрике Фубини-Штуди, был дан позднее Ананданом и Аароновым [18]. При этом ссылки на Мандельштама и Тамма не давались. Поэтому в западной литературе это соотношение часто ошибочно называют соотношением Анандана-Ааронова.

Благодарности

В заключение хочу поблагодарить А. Клейна, С. Лоренца, Т. А. Болохова, А. В. Осипова, Е. В. Аксёнову, А. Ю. Тощевикову, М. Гатти и А. К. Пэти за полезные дискуссии, литературные указания и помощь в добывании литературы.

Список литературы

- [1] J. Hilgevoord, J. Uffink “The uncertainty principle”, in *The Stanford encyclopedia of philosophy*, ed. E. N. Zalta (2001), <http://plato.stanford.edu/archives/win2001/entries/qt-uncertainty/>.
- [2] W. Heisenberg “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”, *Zeitschrift für Physik* **43**, 172-198 (1927). (цит. по [1])
- [3] E. H. Kennard “Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen”, *Zeitschrift für Physik* **44**, 326-352 (1927). (цит. по [1])
- [4] W. Pauli “Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik”, in *Handbuch der Physik*, eds. K. Geiger and H. Scheel, 2nd edition, v. 245, Berlin: Springer (1933). (цит. по [1])
- [5] Ю. И. Воронцов „Соотношение неопределённости энергия – время измерения“, *УФН* **133**(2), 351-365 (1981), <http://www.ufn.ru/archive/russian/abstracts/abst5151.html>.
- [6] Л. И. Мандельштам, И. Е. Тамм „Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике“, *Изв. АН СССР (сер. физ.)* **9**, 122-128 (1945), в сб. [7], стр. 306-315, <http://daarb.narod.ru/mandtamm-rus.html>, <http://wave.front.ru/mandtamm-rus.html>.
[анг.: L. I. Mandelshtam, I. E. Tamm “The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics”, *J. Phys. (USSR)* **9**, 249-254 (1945).]
- [7] Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, т. 2, М.-Л. (1947).
- [8] Д. А. Арбатский „О квантовании электромагнитного поля“ (2002), <http://daarb.narod.ru/qed-rus.html>, <http://wave.front.ru/qed-rus.html>, arXiv:math-ph/0402003.
[анг.: D. A. Arbatsky “On quantization of electromagnetic field”, *Font. phys.* **42**, 3-45 (2002), <http://daarb.narod.ru/qed-eng.html>, <http://wave.front.ru/qed-eng.html>, arXiv:math-ph/0402003.]
- [9] Д. А. Арбатский „Что такое „релятивистское каноническое квантование?““ (2005), <http://daarb.narod.ru/wircq-rus.html>, <http://wave.front.ru/wircq-rus.html>, arXiv:math-ph/0503029.
[анг.: D. A. Arbatsky “What is “relativistic canonical quantization?”” (2005), <http://daarb.narod.ru/wircq-eng.html>, <http://wave.front.ru/wircq-eng.html>, arXiv:math-ph/0503029.]
- [10] T. D. Newton, E. P. Wigner “Localized states for elementary systems”, *Rev. Mod. Phys.* **21**(3), 400-406 (1949).
[рус.: „Локализованные состояния элементарных систем“, в сб. [11], стр. 277.]
- [11] Е. Вигнер „*Этюды о симметрии*“, М.: Мир (1971). [анг.: E. P. Wigner “*Symmetries and reflections*”, Bloomington-London: Indiana univ. press (1970).]
- [12] Д. А. Арбатский „Принцип определённости“ (2005), <http://daarb.narod.ru/tcp-rus.html>, <http://wave.front.ru/tcp-rus.html>, arXiv:quant-ph/0506165.
[анг.: D. A. Arbatsky “The certainty principle”, *Font. phys.* **81**, 27-32 (2005), <http://daarb.narod.ru/tcp-eng.html>, <http://wave.front.ru/tcp-eng.html>, arXiv:quant-ph/0506165.]

- [13] G. Fubini, Atti Istit. Veneto, **63**, 502-513 (1904). (цит. по [15])
- [14] E. Study, Math. Ann., **60**, 321-378 (1905). (цит. по [15])
- [15] А. Л. Онищик „Фубини-Штуди метрика“, *Математическая энциклопедия*, т. 5, ред. И. М. Виноградов, М.: Сов. энц. (1985).
- [16] D. Judge, Nuovo Cimento **31**, 332 (1964). (цит. по [17])
- [17] А. С. Давыдов „Квантовая механика“, изд. 2-е, М.: Наука (1973).
- [18] J. Anandan, Y. Aharonov “Geometry of quantum evolution”, Phys. Rev. Lett. **65**(14), 1697-1700 (1990).

	принцип неопределённости (Гейзенберг, 1927)	принцип определённости (Арбатский, 2005)
x, p	$\Delta_{\rangle} X \Delta_{\rangle} P \geq \frac{\hbar}{2}$ (Кеннард, 1927) $\delta_{\rangle} X \Delta_{\rangle} P \geq \hbar$ (Арбатский, 2006)	$ \delta x \Delta_{\rangle} P \geq \hbar$ (Арбатский, 2005) $\Delta_{\rangle} (\delta x_1 P_1 + \delta x_2 P_2 + \delta x_3 P_3) \geq \hbar$ (Арбатский, 2005)
φ, J	$\Delta'_{\rangle} \Phi \Delta_{\rangle} J \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 - \frac{3}{\pi^2} (\Delta'_{\rangle} \Phi)^2 \right]$ (Джадж, 1964) $\delta_{\rangle} \Phi \geq \min (\hbar / \Delta_{\rangle} J ; \pi)$ (Арбатский, 2006)	$ \delta \varphi \Delta_{\rangle} J \geq \hbar$ (Арбатский, 2005) $\Delta_{\rangle} (\delta \varphi_1 J_1 + \delta \varphi_2 J_2 + \delta \varphi_3 J_3) \geq \hbar$ (Арбатский, 2005)
t, E	—	$ \delta t \Delta_{\rangle} H \geq \hbar$ (Мандельштам, Тамм, 1945)
все	—	$\Delta_{\rangle} (- \delta x_{\mu} P_{\mu} + \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} J_{\mu\nu}) \geq \hbar$ (Арбатский, 2005)